DIE ALLGEMEINE RIEMANN-INTEGRATION IN TOPOLOGISCHEN RÄUMEN. D. *)

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of March 30, 1968)

Einleitung. Φ sei in diesem Teil *positiv für jedes Intervall i*. Diese und weitere hinzugefügten Annahmen, insbes. die Uniformitätsannahmen für die Umgebungsbasen der Punkte, dienen dazu eine Behandlung der (starken) extremen Derivierten und Ableitungen von Intervall- und Segmentfunktionen zu ermöglichen. Daneben wird ein Denjoy-Lipschitz-Stieltjes Integral, $(D\ Li\ S)^*$-Integral, in bezug auf Φ eingeführt, das eine Lösung des Problems der primitiven Intervall- und Segmentfunktionen zuläßt. Es ist im allgemeinen nicht absolut-konvergent, läßt sich dennoch bei Hinzufügung einer ,,Randstetigkeits''-Bedingung als Spezialfall vom allgemeinen Riemann-Integral in bezug auf Φ auffassen.

§ 15. Aus der lokalen Separabilität von X folgt, mit Annahmen in A, § 1, für jeden Punkt $P \in i_0$ die Existenz von abzählbar vielen Intervallumgebungen $i_n(P)$ $(n=1, 2, \ldots)$, welche eine Umgebungsbasis von X in P bilden.

Axiom 12ᵃ. Die Punkte $P \in X$ haben derartige Umgebungsbasen $\{i_n(P)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, daß für *jedes* n und *jede* gegen P konvergierende Punktfolge $\{P_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ zwischen $i_n(P)$ und den mengentheoretischen Grenzmengen der $i_n(P_k)$ die Relation

$$\liminf_{k\to\infty} i_n(P_k) = \limsup_{k\to\infty} i_n(P_k) = \lim_{k\to\infty} i_n(P_k) = i_n(P)$$

erfüllt wird.

Axiom 12ᵇ. Jede Intervallumgebung $u(P) \subseteqq i_0$ eines Punktes $P \in i_0$ läßt sich von innen her mittels abzählbar vieler durch die Umgebungsbasis von P (eingeführt in 12ᵃ) bestimmten Intervalle $u_{n_l}(P)$ $(l=1, 2, \ldots)$ annähern, was heißen soll:

$$\bar{i}_{n_l}(P) \subset u(P), \lim_{l\to\infty} \bar{i}_{n_l}(P) = u(P).$$

*) Korrektur. In Teil A, § 3, (erste) Bemerkung streiche man: (und ist dadurch jedes Intervall i ein stark separabeler Raum). In Teil C, § 13$^{\text{bis}}$, Vitali-Axiom ändere man: [der Raum i_0 ist...] in: [der Raum i_0 sei lokal separabel].

Satz. Bei $P \in i_0$, $P_k \in i_0$ $(k=1, 2, \ldots)$ und $\{P_k\}$ konvergierend gegen P ist für jede natürliche Zahl n und die nach Axiom 12$^{\text{a}}$ zugehörigen Intervalle $i_n(P)$, $i_n(P_k)$:

$$\lim_{k\to\infty} \Phi[i_0\cdot i_n(P_k)] = (\text{C, § 10}) \lim_{k\to\infty} m_\Phi[i_0\cdot i_n(P_k)] = (\text{C, § 11})\ m_\Phi[i_0\cdot i_n(P)] = \\ = \Phi[i_0\cdot i_n(P)],$$

also:

$$\lim_{k\to\infty} \Phi[i_0\cdot i_n(P_k)] = \Phi[i_0\cdot i_n(P)].$$

Definition. $\mathfrak{F}$ sei eine in i_0 und $\bar{i}_0$ endlichwertige, ***beschränkt additive*** Intervall- und Segmentfunktion mit $\mathfrak{F}(i) = \mathfrak{F}(\bar{i})$ für jedes $i \subseteqq i_0$.

Dann heißt $\mathfrak{F}$ *stetig in* $\bar{i}_0$, falls für jedes Intervall $i \subseteqq i_0$ aus $\{i_k\}$ eine Folge von Teilintervallen von i_0 mit $\lim_{k\to\infty} i_k = i$ immer folgt

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{F}(i_k) = \mathfrak{F}(\text{i}).\ ^{35})$$

Definition. Unter den Annahmen der vorigen Definition seien *die (starken) oberen und unteren Derivierten von $\mathfrak{F}$ in bezug auf Φ in einem Punkte* $P \in i_0$ wie folgt definiert:

$$\bar{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} = \limsup_{i(P)\subset i_0;\, i(P)\to P} \frac{\mathfrak{F}[i(P)]}{\Phi[i(P)]} \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} = \liminf_{i(P)\subset i_0;\, i(P)\to P} \frac{\mathfrak{F}[i(P)]}{\Phi[i(P)]}.$$

Unter Benutzung der in Axiom 12$^{\text{a}}$ eingeführten Umgebungsbasen läßt sich schreiben:

$$\text{(57)} \quad \bar{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} = \lim_{N\to\infty} \Big[\text{obere Grenze von } \frac{\mathfrak{F}[i(P)]}{\Phi[i(P)]} \text{ für alle } i(P) \subset i_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} i_n(P)\Big],$$

und, wegen Axiom 12$^{\text{b}}$ und der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ in i_0, [36] auch

$$\text{(58)} \quad \left\{ \bar{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} = \lim_{N\to\infty} \Big[\text{obere Grenze der } \frac{\mathfrak{F}[i_n(P)]}{\Phi[i_n(P)]} \text{ für alle (abzählbar vielen) } i_n(P) \subset i_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} i_n(P)\Big]; \right.$$

ebenso ist

$$\text{(58}^{\text{bis}}\text{)} \quad \left\{ \underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} = \lim_{N\to\infty} \Big[\text{untere Grenze der } \frac{\mathfrak{F}[i_n(P)]}{\Phi[i_n(P)]} \text{ für alle } i_n(P) \subset \subset i_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} i_n(P)\Big]. \right.$$

Aus der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ in i_0 im Sinne der vorletzten Definition und der im letzten Satz gegebenen Eigenschaft von Φ, zusammen mit $\Phi \neq 0$

---

[35]) Bemerkt sei daß im euklidischen Raum R_2 Additivität und Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ in $\bar{i}_0{}^*$ im Sinne von Teil VIII, § 57 (zweiter Satz) unserer Arbeit in diesen Proceed. Series **A**, **68**–**70** (1965/7), insbes. **70** (1967), S. 311, die Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ in $\bar{i}_0{}^*$ im hier gegebenen Sinne zur Folge hat.

[36]) Die oberen Grenzen in (57) und (58) sind, für jedes N, einander gleich.

für jedes i, folgt die Stetigkeit der Punktfunktion $\frac{\mathfrak{F}[i_n(P)]}{\Phi[i_n(P)]}$ (n fest) in jedem Punkte $P \in i_0$. Die in (58) und (58^{bis}) auftretenden oberen und unteren Grenzen sind dadurch *in* i_0 *Borel-meßbar*, woraus *dieselbe Eigenschaft für* $\overline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ *und* $\underline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ folgt.

Bemerkung. Aus $\mathfrak{F}$ additiv und stetig in $\bar{i}_0$, und $i_0^* \subset i_0$ folgt daß die Werte der extremen Derivierten von $\mathfrak{F}$ in bezug auf Φ in jedem Punkt $P \in i_0^*$ unabhängig davon sind ob man P als Punkt in i_0 oder als Punkt in i_0^* betrachtet.

Definition. Sind obere und untere Derivierten von $\mathfrak{F}$ in bezug auf Φ ($\mathfrak{F}$ wie im vorigen Absatz) in $P \in i_0$ einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die (starke) Ableitung von* $\mathfrak{F}$ *in bezug auf* Φ *in dem Punkte* P, $D_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$.

Definition. *Eine Intervallfunktion* Φ *(gemäß der Einleitung dieses Teiles)* hat *die Ru-* (oder Rutovitz-)*Eigenschaft in* i_0, falls für jede in i_0 additive und in i_0 stetige Intervallfunktion $\mathfrak{F}$ aus der Endlichkeit von $\overline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ in den Punkten (P) einer Teilmenge H von i_0 die Existenz von $D_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ in den Punkten (P) von H–E folgt, wobei E eine Teilmenge von H mit $m_\Phi(E)=0$.

Bemerkung. Der euklidische Raum R_2 mit $\Phi(i)$ gleich dem elementaren Maß der Intervalle (i), $\Phi(r)=0$ für Intervallränder (r), und $\mathfrak{F}$ additiv und stetig in jedem $\bar{i}_0^*$ im Sinne von Fußn. 35 liefert ein Beispiel, wobei alle bisher in den Teilen A–D eingeführten Axiomata für Raum und Φ, und ebenso die Annahmen von D. Rutovitz in dem Theorem II der Arbeit von ihm und C. Y. Pauc: *Theory of Ward for cell functions*, Ann. di mat. (4) **47** (1959), S. 1–58, insbes. S. 13, erfüllt sind; aus den letzten Annahmen geht dadurch hervor, daß in diesem Beispiel die Ru-Eigenschaft unserer letzten Definition in i_0 durch Φ erfüllt wird;[37]) außerdem sind $\overline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ in i_0 Borel- und somit auch m_Φ-meßbar.

§ 16. Axiom 13°. Zu jedem Intervall i_0 und jeder natürlichen Zahl N, und den gemäß Axiom 12^{a} zu den Punkten von i_0 gehörigen Umgebungsbasen gibt es Zerlegungen wie in der hier folgenden Definition vorausgesetzt.

Definition. Es gibt zu den Punkten (P) von i_0 Umgebungsbasen $\{i_n(P)\}$ ($n=1, 2, \ldots$), welche in der in Axiom 12^{a} angegebenen Weise miteinander zusammenhängen. $\mathfrak{F}$ sei in i_0 und $\bar{i}_0$ endlichwertige Intervall- und Segmentfunktion mit $\mathfrak{F}(i)=\mathfrak{F}(\bar{i})$ für jedes $i \subseteqq i_0$. *Das obere und das*

---

[37]) Bemerkt sei daß die Definitionen von $\overline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{\Phi;P}\,\mathfrak{F}$ bei Rutovitz dieselben Werte wie die hier benutzten Definitionen dieser extremen Derivierten liefern. Vergl. auch loc. cit. 35), S. 310, 311.

untere B- (oder Burkill-)Integral von $\mathfrak{F}$ über i_0 oder $\bar{i}_0$, $\overline{\int}_{i_0(\bar{i}_0)}(B)\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{\int}_{i_0(\bar{i}_0)}(B)\mathfrak{F}$, werden durch die endlich vorauszusetzenden Grenzwerte

$$\lim_{N\to\infty} [\text{obere Grenze aller } \sum_{(k)}{}_N \mathfrak{F}[u(P_k)] \equiv \lim_{N\to\infty} \sup \sum_{(k)}{}_N \mathfrak{F}[u(P_k)]$$

bzw.

$$\lim_{N\to\infty} [\text{untere Grenze aller } \sum_{(k)}{}_N \mathfrak{F}[u(P_k)] \equiv \lim_{N\to\infty} \inf \sum_{(k)}{}_N \mathfrak{F}[u(P_k)]$$

definiert; dabei werden unter $\sum_{(k)}{}_N u(P_k)$ alle Zerlegungen von i_0 in endlich viele Teilintervalle $u(P_k)$ zugelassen, wobei $u(P_k)$ Umgebung von $P_k \subset i_0$, $u(P_k) \subseteqq i_{n_k}(P_k) \subseteqq \prod_{n=1}^{N} i_n(P_k)$, mit $\{i_n(P_k)\}$ Umgebungsbasis von P_k (Ax. 12ᵃ); zwei Teilintervalle können selbstverständlich höchstens Randpunkte gemein haben.

Fallen $\overline{\int}_{i_0}(B)\mathfrak{F}$ und $\underline{\int}_{i_0}(B)\mathfrak{F}$ zusammen, so liefert ihr gemeinsamer Wert *das Burkill-Integral von $\mathfrak{F}$ über i_0 oder $\bar{i}_0$,* $\int_{i_0(\bar{i}_0)}(B)\mathfrak{F}$.

Bei $\mathfrak{F}$ additiv für die Teilintervalle (-segmente) von $i_0(\bar{i}_0)$ ist immer $\int_{i_0(\bar{i}_0)}(B)\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(i_0) = \mathfrak{F}(\bar{i}_0)$.

S a t z. Aus der Existenz von $\int_{i_0}(B)\mathfrak{F}$ folgt für jedes $i \subset i_0$ die Existenz von $\int_i(B)\mathfrak{F}$; dabei ist das Burkill-Integral über die Teilintervalle von i_0 (beschränkt) additiv.

§ 16bis. D e f i n i t i o n. $\mathfrak{F}$ sei in i_0 und $\bar{i}_0$ endlichwertige Intervall- und Segmentfunktion mit $\mathfrak{F}(i) = \mathfrak{F}(\bar{i})$ für jedes $i \subseteqq i_0$. Dann ist sie in einem Segment $\bar{i}_0^* \subset i_0$ *Lipschitz-stetig in bezug auf Φ*, falls es eine positive Konstante N gibt so daß für jedes $i \subseteqq i_0^*$:

$$|\mathfrak{F}(i)| \leqq N \cdot \Phi(i);$$

wir nennen $\mathfrak{F}$ wohl auch *(Φ, N)-stetig in* $i_0^*(\bar{i}_0^*)$.

S a t z. Ist $\mathfrak{F}$ in i_0^* (Φ, N)-stetig, und existiert das Burkill-Integral $\int_{i(\bar{i})}(B)\mathfrak{F}$ in $\bar{i}_0^*$, so ist dieses Integral dort eine (Φ, N)-stetige, additive Intervall- und Segmentfunktion.

A x i o m 14ᵃ (erste Uniformitätseigenschaft der Umgebungsbasen). Zu einer abgeschlossenen Menge $E \subset \bar{i}_0$ und positivem θ gibt es eine natürliche Zahl $\nu \equiv \nu(E; \theta)$ und zugehörige Überdeckungen von E mittels endlich vieler Segmente $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p, \subset \bar{i}_0$ und paarweise ohne gemeinsame inneren Punkte, und mit zugehörigen Punkten $P_j \in u_j$ und $u_j(P_j) \subset \prod_{n=1}^{\nu} i_n(P_j)$, wobei $\{i_n(P_j)\}$ die Umgebungsbasis von P_j (gemäß Ax. 12ᵃ); dabei soll uniform, also für *jede* derartige Überdeckung $m_\Phi[\sum_{j=1}^{p} \bar{u}_j - E] < \theta$ sein.

A x i o m 14ᵇ (zweite Uniformitätseigenschaft der Umgebungsbasen). Zu einer abgeschlossenen Menge $E, \subset \bar{i}_0$, und einer zugehörigen Überdeckung Ω mittels endlich vieler Segmente, paarweise ohne gemeinsame inneren Punkte, gibt es für jede natürliche Zahl N_0, bei den gemäß Axiom 12ª den Punkten (P) von E zugewiesenen Umgebungsbasen $\{i_n(P)\}$, eine Zerlegung von Ω in endlich viele Segmente, welche sich in zwei Gruppen teilen lassen: 1° die Segmente $\bar{w}_j$ der ersten Gruppe haben mindestens einen Randpunkt gehörend zu E, jedoch keine zu E gehörenden inneren Punkte; 2° die Segmente $\bar{v}_l$ der zweiten Gruppe haben sowohl im Innern wie auf ihrem Rande Punkte mit E gemein; dabei ist dann für jedes solche $\bar{v}_l$ und jeden zugehörigen Punkt $P \in E \cdot v_l$ uniform

$$\bar{v}_l \subset \prod_{n=1}^{N_0} i_n(P).$$

Satz.[38]) Ist $\mathfrak{F}$ in $\bar{i}_0^*(\subset i_0)$ additiv und stetig (§ 15), E eine abgeschlossene Teilmenge von $\bar{i}_0^*$, und bei $N>0$ die zugehörige, aus E hervorgehende Intervallfunktion $\mathfrak{F}_E$ [mit $\mathfrak{F}_E(i)=\mathfrak{F}(i)$ bei $E\cdot i \neq 0$, sonst $\mathfrak{F}_E(i)=0$] (Φ, N)-stetig in $\bar{i}_0^*$ [Φ mit der Ru-Eigenschaft in i_0 (§ 15)], so existiert das Burkill-Integral $\int_{i_0^*}(B)\mathfrak{F}_E$, mit

$$\int_{i_0^*}(B)\, \mathfrak{F}_E = \int_E(LS)\, D_{\Phi;P}\mathfrak{F}\, d m_\Phi;$$

dabei ist für das Intervall i_0^* $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ die in den Punkten von E, eine Teilmenge von m_Φ-Maß Null ausgenommen, existierende, gleichmäßig beschränkte Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach Φ.

Beweis. Aus der (Φ, N)-Stetigkeit von $\mathfrak{F}_E$ in $\bar{i}_0^*$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit der extremen Derivierten (58) und (58ᵇⁱˢ) (mit i_0 ersetzt durch i_0^*) auf $E\cdot i_0^*$. Da $\mathfrak{F}$ additiv und stetig in i_0^* ist, und Φ die Ru-Eigenschaft in i_0 hat, existiert die Ableitung $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ in den Punkten P von $E-H$, wobei $m_\Phi(H)=0$, und ist dort gleichmäßig beschränkt. Nennen wir die in (58) und (58ᵇⁱˢ) (unter Ersetzung von i_0 durch i_0^*) auftretenden oberen und unteren Grenzen $G_N(P)$ bzw. $g_N(P)$, so folgt aus der Borel- und somit auch m_Φ-meßbarkeit von G_N und g_N auf $E-H$, unter Anwendung des bekannten Egoroffschen Grenzwertsatzes,[39]) daß zu $\varepsilon>0$ und $\eta>0$ eine Teilmenge E' von $E\cdot i_0^*$ mit $m_\Phi(E')<\eta$, und eine natürliche Zahl N_0 existieren, so daß

$$\begin{cases} P \in E\cdot i_0^* - E' \text{ impliziert} \\ D_{\Phi;P}\mathfrak{F} - \varepsilon < g_{N_0}(P) \leqq G_{N_0}(P) < D_{\Phi;P}\mathfrak{F} + \varepsilon; \end{cases}$$

daraus folgt (vergl. Fußn. 36) weiter für jede Umgebung $i(P) \subset i_0^* \cdot \prod_{n=1}^{N_0} i_n(P)$:

$$\left| \frac{\mathfrak{F}[i(P)]}{\Phi[i(P)]} - D_{\Phi;P}\mathfrak{F} \right| < \varepsilon. \tag{59}$$

---

[38]) In R_2 gibt es mit den Axiomen 12ª, 12ᵇ, 13°, 14ª, 14ᵇ korrespondierende Sätze, welche als Realisierungen dieser Axiome zu betrachten sind, und die es ermöglichen aus dem hier folgenden Satz den letzten Satz auf S. 311 von loc. cit. 35), Teil VIII als Spezialfall folgern zu lassen.

[39]) In der in H. Hahn und A. Rosenthal, *Set functions* 1948, S. 124 gegebenen Fassung; nach fester Wahl von E' zu η hängt die Wahl von N_0 nur noch von ε ab.

Nach Axiom 14[a] gibt es bei obigem η eine natürliche Zahl $\nu \equiv \nu(E, \eta)$ und zugehörige Überdeckungen von E mittels endlich vieler Segmente $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \subset i_0^*$ und paarweise ohne gemeinsame inneren Punkte, und mit zugehörigen Punkten $P_j \in u_j$ und

(60) $$u_j(P_j) \subset \prod_{n=1}^{\nu} i_n(P_j),$$

wobei $\{i_n(P_j)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ Umgebungsbasis von P_j (gemäß Axiom 12[a]); dabei ist dann uniform, also für *jede* derartige Überdeckung

(60[bis]) $$m_\Phi[\sum_{j=1}^{p} \bar{u}_j - E] < \eta.$$

Wir denken uns von nun an eine derartige, (60) und (60[bis]) erfüllende Überdeckung von E fest gewählt. Die bei der Überdeckung von den Segmenten $\bar{u}_j$ gebildete Menge Ω läßt sich, nach Axiom 14[b], bei obigem N_0 zerlegen in endlich viele Segmente, paarweise ohne gemeinsame inneren Punkte, welche sich in zwei Gruppen teilen lassen: 1° die Segmente $\bar{w}_k$ der ersten Gruppe haben mindestens einen Randpunkt gehörend zu E, jedoch keine zu E gehörenden inneren Punkte; 2° die Segmente $\bar{v}_l$ der zweiten Gruppe haben sowohl im Innern wie auf ihrem Rande Punkte mit E gemein; dabei ist dann für jedes solche $\bar{v}_l$ und jeden zugehörigen Punkt $P \in E \cdot v_l$ uniform $\bar{v}_l \subset \prod_{n=1}^{N_0} i_n(P)$, wodurch

(59[bis]) $$v_l \subset i_0^* \cdot \prod_{n=1}^{N_0} i_n(P) \ (\{i_n(P)\} \text{ Umgebungsbasis von } P).$$

Mit der Additivität von $\mathfrak{F}$ und der Zerlegung von $\Omega = \sum_{(j)} \bar{u}_j$ in $\sum_{(k)} \bar{w}_k$ und $\sum_{(l)} \bar{v}_l$ folgt:

(61) $$\left\{\begin{aligned} &\textstyle\int_E (LS)\, D_{\Phi;P}\mathfrak{F}\, dm_\Phi - \sum_{(j)} \mathfrak{F}(\bar{u}_j) = \\ &\quad = \sum_{(l)} [\textstyle\int_{E\cdot\bar{v}_l} (LS)\, D_{\Phi;P}\mathfrak{F}\, dm_\Phi - \mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)] - \sum_{(k)} \mathfrak{F}_E(\bar{w}_k). \end{aligned}\right.$$

Mit (60[bis]) und $\mathfrak{F}_E$ (Φ, N)-stetig in i_0^* folgt:

(62) $$|\sum_{(k)} \mathfrak{F}_E(\bar{w}_k)| < N \cdot \eta.$$

Da sich für jedes Segment $\bar{v}_l$ schreiben läßt:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{E\cdot\bar{v}_l} (LS)\, D_{\Phi;P}\mathfrak{F}\, dm_\Phi - \mathfrak{F}_E(\bar{v}_l) = \int_{E'\cdot\bar{v}_l} (LS)\, D_{\Phi;P}\mathfrak{F}\, dm_\Phi + \\ &\quad + \textstyle\int_{(E-E')\cdot\bar{v}_l} (LS) \left(D_{\Phi;P}\mathfrak{F} - \dfrac{\mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)}{\Phi(\bar{v}_l)}\right) dm_\Phi - \dfrac{\mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)}{\Phi(\bar{v}_l)} \times m_\Phi[\bar{v}_l - \bar{v}_l \cdot (E-E')], \end{aligned}$$

folgert man aus $\mathfrak{F}_E$ (Φ, N)-stetig, (59), (59[bis]) und (60[bis]), mit $m_\Phi(E') < \eta$, daß die erste Summe des zweiten Gliedes von (61) in absolutem Werte kleiner ist als

$$N \cdot \eta + \varepsilon \cdot m_\Phi(E) + N \cdot 2\eta.$$

Dies mit (61) und (62) liefert weiter:

$$| \int_E (LS)\, D_{\Phi;P} \mathfrak{F}\, d m_\Phi - \sum_{(j)} \mathfrak{F}_E(\bar{u}_j)| < 4N \cdot \eta + \varepsilon \cdot m_\Phi(E).$$

Bei η fest und $\varepsilon \to 0$ folgt

$$| \int_E (LS)\, D_{\Phi;P} \mathfrak{F}\, d m_\Phi - \sum_{(j)} \mathfrak{F}_E(\bar{u}_j)| \leqq 4N \cdot \eta.$$

Dies gilt somit für jede zu $\nu(E, \eta)$ fest gewählte, (60) (und (60^{bis})) genügende Überdeckung von E; [40]) $\eta \to 0$ (zusammen mit der Definition von $\mathfrak{F}_E$ und des Burkill-Integrals für $\mathfrak{F}_E$) liefert die Behauptung des Satzes.

§ 17. Axiom 15°. Der Raum i_0 ist stark separabel.

Bemerkung. Durch die Hinzufügung dieses Axioms wird jedes i_0 zu einem metrisierbaren Raum, da i_0 schon ein regulärer Hausdorff-Raum ist (A, § 1). [41])

Definition des $D\ Li\ S$-Integrals in bezug auf Φ (Φ mit der Ru-Eigenschaft in i_0). *Ein unbestimmtes DLiS-Integral in bezug auf Φ der Funktion f in i_0* ist eine für die Teilintervalle $i \subseteqq i_0$ beschränkt additive, stetige Intervallfunktion $\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i (DLiS)\, f\, d\Phi$, für die zu jeder abgeschlossenen Teilmenge E von i_0 ein Stück ϖ, enthalten in einem zugehörigen Teilsegment $\bar{i}_\varpi$ von i_0 [42]) existiert, zu welchem es, falls dieses Stück nicht Teil eines Intervallrandes ist, [42bis]) eine natürliche Zahl N_ϖ gibt derartig daß: 1° $\mathfrak{F}_\varpi$ (Φ, N_ϖ)-stetig ist in $\bar{i}_\varpi$; 2° f in denjenigen Punkten (P) von ϖ, in welchen $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ existiert, eine Teilmenge von ϖ mit m_Φ-Maß Null ausgenommen, mit dieser Ableitung zusammenfällt, wodurch mit dem vorigen Satz für jedes Intervall $i \subset \bar{i}_\varpi$ folgt:

$$\int_i (B)\, \mathfrak{F}_{\varpi \cdot i} = \int_{\varpi \cdot i} (LS)\, f\, d m_\Phi.$$

Mittels transfiniter Induktion, unter Anwendung der Additivität und Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ und insbes. des Axioms 4^{b}, folgt die eindeutige Bestimmtheit des *DLiS*-Integrals von f für die Teilintervalle von i_0. [43]) [43bis])

---

[40]) Zu jeder Überdeckung von E, welche (60) genügt, läßt $\bar{i}_0^*$ sich schreiben als $\sum_{(j)} \bar{u}_j +$ eine Summe von endlich vielen Segmenten $\bar{\mathfrak{u}}_t$, mit $u_j \cdot \mathfrak{u}_t = 0$, $\mathfrak{u}_{t_1} \cdot \mathfrak{u}_{t_2} = 0$ ($t_1 \neq t_2$) (Ax. 4^{b} in A). Nach Axiom 13° gibt es zu jedem derartigen Segment $\bar{\mathfrak{u}}_t$ eine Zerlegung in Teilsegmente $\bar{u}_{t,t'}$, für die bei ν wie im Texte eine Inklusion wie (60) gilt. Zusammen mit den $\bar{u}_j$ liefern sie eine zu ν gehörende Zerlegung von $\bar{i}_0^*$.

[41]) Dies folgt etwa aus E. W. Kelley, *General topology* 1955, S. 125 (Theorem).

[42]) Mit Stück ϖ in $\bar{i}_\varpi$ von E wird die abgeschlossene Menge $\overline{E \cdot i_\varpi}$ gemeint.

[42bis]) Ist dies wohl der Fall, so wird dem Stück keinerlei Bedingung auferlegt.

[43]) Durch die Hinzufügung von Axiom 15° läßt sich [mit W. Sierpinski, *General topology*, Second ed. 1952, p. 67 (Cor.)] ein hier anzuwendender Satz beweisen, der lautet: „Ist in einem Hausdorffschen stark separabelen Raum eine Reihe von abgeschlossenen Mengen vorgelegt, die entsprechend den Zahlen der ersten und

§ 17[bis]. Theorem 20 [Lösung des Problems der primitiven Funktionen i.b.a. Φ (mit der Ru-Eigenschaft)]. Hat eine in i_0 stetige und beschränkt additive Intervallfunktion $\mathfrak{F}$ endliche obere und untere Derivierten, $\overline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}$, so existiert $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ in den Punkten von i_0-H, mit $m_\Phi(H)=0$, und ist für die Teilintervalle (i) von i_0:

$$\mathfrak{F}(i)=\int_i(DLiS)D_{\Phi;P}\mathfrak{F}dm_\Phi.$$ [44])

Beweis. Ist N eine natürliche Zahl, und $P\in i_0$ ein Punkt mit

$$-N<\underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}\leqq\overline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}<N,$$

so gibt es eine natürliche Zahl $\nu\equiv\nu(P;N)$ so daß bei der Umgebungsbasis $\{i_n(P)\}$ von P (§ 15) gilt:

$$(63)\quad \left\{\left|\frac{\mathfrak{F}[u(P)]}{\Phi[u(P)]}\right|\leqq N \text{ für jedes Umgebungsintervall } u(P) \text{ von } P \text{ mit } u(P)\subset i_0\cdot\prod_{n=1}^{\nu}i_n(P).\right.$$

Die Punkte (P) von i_0 mit (63) für *dieselben* N und ν bilden wegen Axiom 12[b] und der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ und Φ (§ 15) eine (in i_0) abgeschlossene Menge $E_{N,\nu}$. Wegen der Endlichkeit der extremen Derivierten in allen Punkten von i_0 ist

$$(64)\qquad i_0=\sum_{\substack{N=1,2,\ldots;\\ \nu=1,2,\ldots}}E_{N,\nu}.$$

Zu einem Segment $\bar{i}_0^*\subset i_0$ und jedem nicht leeren Produkt $\bar{i}_0^*\cdot E_{N,\nu}$ (N und ν fest) gehört eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[\bar{i}_0^*]$, wobei für *jeden* Punkt $P\in\bar{i}_0^*$ die zugehörige Intervallumgebung $i(P)$ mit $i_0\cdot\prod_{n=1}^{\nu}i_n(P)$ zusammenfällt. Zu $\mathfrak{A}[\bar{i}_0^*]$ gibt es dann, nach Ax. 7° (Teil A, § 2), eine $\mathfrak{A}[\bar{i}_0^*]$-Zerlegung von endlich vielen Teilsegmenten $(\bar{u}_j)$, mit $\bar{u}_j\subset i(P_j)\in\mathfrak{A}[\bar{i}_0^*]$. Betrachtet wird die Menge H derjenigen $\bar{u}_j$, welche Punkte mit $E_{N,\nu}$ gemein haben; dann ist $H\cdot E_{N,\nu}=\bar{i}_0^*\cdot E_{N,\nu}$. Anwendung von Axiom 14[b] auf die abgeschlossene Menge $H\cdot E_{N,\nu}$ und ihre Überdeckung durch die endlich vielen $\bar{u}_j$, welche H bilden, zusammen mit der natürlichen Zahl ν, zeigt die Existenz einer Zerlegung von H in endlich viele Segmente, paarweise ohne gemeinsame inneren Punkte, welche sich in zwei Gruppen teilen lassen: 1° die Segmente $\bar{w}_j^{(N,\nu)}$ der ersten Gruppe haben mindestens einen

---

zweiten Zahlenklasse geordnet sind: $E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_n\supset\ldots\supset E_\omega\supset E_{\omega+1}\supset\ldots$, wobei jede dieser Mengen in allen vorangehenden nirgends dicht liegt, so gibt es eine kleinste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, für die E_α leer ist." Das auf diesem Satz ruhende Beweisverfahren ist insbes. durch die Arbeiten von A. Denjoy über Totalisation als wohlbekannt zu betrachten.

[43bis]) In den Punkten (P) von i_0, eine Teilmenge von m_Φ-Maß Null ausgenommen, existiert die (starke) Ableitung von $\mathfrak{F}(i)$, mit $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}=f(P)$.

[44]) Vergl. loc. cit. 35), S. 312 (Theorem 66).

Randpunkt gehörend zu $H \cdot E_{N,\nu}$, jedoch keine zu $H \cdot E_{N,\nu}$ gehörenden inneren Punkte; 2° die Segmente $\bar{v}_l^{(N,\nu)}$ der zweiten Gruppe haben sowohl im Innern wie auf ihrem Rande Punkte mit $H \cdot E_{N,\nu}$ gemein; dabei ist dann für jedes solche $\bar{v}_l^{(N,\nu)}$ und jeden zugehörigen Punkt $P \in H \cdot E_{N,\nu} \cdot \cdot v_l^{(N,\nu)}$ uniform (in P):

$$\bar{v}_l{}^{(N,\nu)} \subset \prod_{n=1}^{\nu} i_n(P);$$

mit (63) folgt *daß* $\mathfrak{F}_{E_{N,\nu}}$ [mit $\mathfrak{F}_{E_{N,\nu}}(i) = \mathfrak{F}(i)$ bei $E_{N,\nu} \cdot i \neq 0$, sonst $\mathfrak{F}_{E_{N,\nu}}(i) = 0$] *($\Phi$, N)-stetig in jedem $\bar{v}_l^{(N,\nu)}$ ist.*

$\bar{i}_0^* \cdot E_{N,\nu}$ ist Summe von endlich vielen (abgeschlossenen) ,,Rand"-mengen $(D_j^{(N,\nu)})$, liegend auf den Rändern der $\bar{w}_j^{(N,\nu)}$, und endlich vielen (abgeschlossenen) Teilmengen $(\mathfrak{D}_l^{(N,\nu)})$ in den $\bar{v}_l^{(N,\nu)}$, wodurch außerdem mit (64) folgt:

$$\bar{i}_0^* = \sum_{(N,\nu)} \sum_{(j)} D_j^{(N,\nu)} + \sum_{(N,\nu)} \sum_{(l)} \mathfrak{D}_l^{(N,\nu)}.$$

Mit Axiom 10° (Teil B) folgt daß auch i_0 Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen (E) ist, die entweder ,,Rand"-mengen sind oder Mengen enthalten in Teilsegmenten $(\bar{v})$ von i_0, in welchen für zugehörige N $\mathfrak{F}_E$ (Φ, N)-stetig ist; die Mengen der zweiten Art seien in irgendwelcher Art numeriert: $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$

Jede abgeschlossene Menge E von i_0, welche kein Stück enthält liegend auf einem Intervallrand, muß ein Stück ϖ enthalten, welches zu einer der Mengen (H_n) gehört. Sonst existierte ein Stück ϖ_1 von E, liegend in einem Segment $\bar{i}(\varpi_1)$, welches keine Punkte von H_1 enthält; ein Stuck $\varpi_2 \subset \varpi_1$ liegend in einem Segment $\bar{i}(\varpi_2) \subset \bar{i}(\varpi_1)$, welches keine Punkte von H_2 enthält; u.s.w. Nach einem Satz von Cantor, der insbes. in einem Hausdorff-Raum,[45]) also auch hier, gilt, müßten die (abgeschlossenen kompakten) Stücke $\varpi_1 \supset \varpi_2 \supset \ldots \supset \varpi_n \supset \ldots$ mindestens einen Punkt gemein haben, was jedoch unmöglich ist.

Mit einem wie oben im Beweise kursiv gedruckten Relation und gültig für das eben betrachtete Stück ϖ, und dem zweiten Satz von § 16bis folgt daß $\mathfrak{F}$ den Bedingungen der Definition von § 17 genügt, mit f ersetzt durch $D_{\Phi;P}\mathfrak{F}$, woraus Theorem 20 hervorgeht.

Definition des $(DLiS)^*$-Integrals in bezug auf Φ (Φ mit der Ru-Eigenschaft in i_0). Der Wortlaut ist wie für das *DLiS*-Integral unter Hinzufügung der Bedingung: die extremen Derivierten des Integrals i.b.a. Φ sind endlich in *allen* Punkten von i_0.

Es ist deutlich daß dieses Integral das *DLiS*-Integral in der in Theorem 20 gegebenen Lösung des Problems der primitiven Funktionen ersetzen kann [Theorem 20bis].

---

[45]) Siehe etwa R. VAIDYANATHASWAMY, *Treatise on set topology* I, 1947, S. 104, 105.

§ 17ter. Definition. Eine *in* i_0 definierte Intervallfunktion $\mathfrak{F}$ ist dort *von innen her randstetig,* falls es zu jedem $\bar{\imath} \subset i_0$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[r]$ von $r \equiv \bar{\imath} - i$ gibt so daß für jede $\mathfrak{A}[r]$-Überdeckung von r (im Sinne von A, § 2, Def. β), $\{u(P_j)\}$ $(j = 1, \ldots, \iota)$, mit $P_j \in u(P_j) \cdot r$, $\bar{u}(P_j) \subset i(P_j) \in \mathfrak{A}[r]$, gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^{\iota} \mathfrak{F}\,[u_j \cdot i] \right| < \varepsilon.$$

Satz. Hat eine (im Sinne von § 15, Def.) in i_0 stetige, beschränkt additive Intervall- und Segmentfunktion $\mathfrak{F}$ endliche obere und untere Derivierten, $\bar{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F}$, in jedem Punkte $P \in i_0$, so ist $\mathfrak{F}$ in i_0 von innen her randstetig.

Beweis. Nach A, § 3, Th. 1 existiert für jedes $\bar{\imath} \subset i_0$ mit Rand r das allgemeine R-Integral $\int_r$ (allg. R) $\underline{\bar{D}}_{\Phi;P}\mathfrak{F}\; d\Phi$ und hat den Wert Null. Zu $\eta > 0$ gibt es dadurch eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[r]$ so daß für zugehörige $\mathfrak{A}[r]$-Überdeckungen die zugehörigen Summen $\sum_{(j)} \underline{\bar{D}}_{\Phi;P}\mathfrak{F} \cdot \Phi[u(P_j)]$ zwischen $-\eta$ und $+\eta$ liegen.

Die den Punkten (P) von r durch $\mathfrak{A}[r]$ zugewiesenen Umgebungen $i(P)$ lassen sich derartig einschränken daß eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[r]$ entsteht, wobei für $P \in r \cdot u'(P)$, $u'(P) \subset i'(P) \cdot i_0$, $i'(P) \in \mathfrak{A}'[r]$ immer:

$$\underline{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} - \eta < \frac{\mathfrak{F}[u'(P)]}{\Phi[u'(P)]} < \bar{D}_{\Phi;P}\mathfrak{F} + \eta.$$

Für jede $\mathfrak{A}'[r]$-Überdeckung, welche nun auch $\mathfrak{A}[r]$-Überdeckung sein wird, ist

$$-\eta < \sum_{(j)} \underline{D}_{\Phi;P_j'}\mathfrak{F} \cdot \Phi[u'(P_j')] \leqq \sum_{(j)} \bar{D}_{\Phi;P_j'}\mathfrak{F} \cdot \Phi[u'(P_j')] < \eta,$$

wodurch auch

$$-\eta \cdot [1 + \Phi(i_0)] < \sum_{(j)} \Phi\,[u'(P_j')] \cdot \{\underline{D}_{\Phi;P_j'}\mathfrak{F} - \eta\} < \sum_{(j)} \mathfrak{F}\,[u'(P_j')] < \sum_{(j)} \Phi[u'(P_j')] \cdot$$
$$\cdot \{\bar{D}_{\Phi;P_j'}\mathfrak{F} + \eta\} < \eta \cdot [1 + \Phi(i_0)].$$

Da $\mathfrak{F}$ stetig ist, folgt weiter für jedes positive ε, mit $\varepsilon > \eta \cdot [1 + \Phi(i_0)]$, die Relation

$$-\varepsilon < -\eta \cdot [1 + \Phi(i_0)] \leqq \sum_{(j)} \mathfrak{F}[u'(P_j') \cdot i] \leqq \eta \cdot [1 + \Phi(i_0)] < +\varepsilon;$$

$\mathfrak{F}$ ist in i_0 von innen her randstetig.

Dieser Satz und Theorem 20bis (§ 17bis) liefern unmittelbar:

Theorem 20ter. Das Problem der primitiven Funktionen, welches in den Theoremen 20 und 20bis gelöst wurde, läßt schon eine Lösung mittels eines in i_0 von innen her randstetigen $(DLiS)^*$-Integrals in bezug auf Φ zu.

§ 18. Es ist das Ziel der nachfolgenden Seiten zu zeigen daß, unter Hinzufügung eines letzten Axioms (Axiom 14^c), die von innen her randstetigen $(DLiS)^*$-Integrale i.b.a. Φ Spezialfälle der allgemeinen Riemann-Integrale i.b.a. Φ sind. Dabei finden zwei Hilfsintegrationen im Perronschen Sinne Anwendung, welche wir in diesem Par. einführen und vergleichen werden.

Axiom 14^c (dritte Uniformitätseigenschaft der Umgebungsbasen).[46]) Die durch die Axiome 12^a, 12^b für die Punkte $P \in X$ eingeführten Umgebungsbasen $\{i_k(P)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, näher charakterisiert in jedem Intervall i_0 durch die Axiome 14^a, 14^b, sollen in jedem i_0 außerdem folgende Bedingung erfüllen: Sind den Punkten $P_k \in i_0$ $(k=1, 2, \ldots)$ einer Folge Umgebungen $u_k(P_k)$ zugewiesen mit $\bar{u}_k(P_k) \subset i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P_k)$ und $\bar{u}_1(P_1) \supset \supset \bar{u}_2(P_2) \supset \ldots \supset \bar{u}_k(P_k) \supset \ldots$, so konvergiert die Folge $\{P_k\}$ gegen einen Limespunkt P $(\in i_0)$, wobei sogar zu jeder natürlichen Zahl n eine weitere natürliche Zahl $\varkappa_n$ existiert mit:

$$\bar{u}_k(P_k) \subset \prod_{j=1}^{n} i_j(P) \text{ für jedes } k \geqq \varkappa_n [\{i_j(P)\} \text{ Umgebungsbasis von } P].$$

Lemma. Hat eine in i_0 additive und stetige Intervall- und Segmentfunktion Ψ [mit $\Psi(i)=\Psi(\bar{i})$ bei $i \subseteqq i_0$] die Eigenschaft: $\underline{D}_{\Phi;P}\Psi \geqq 0$ in jedem Punkt $P \in i_0$, so ist $\Psi(i) \geqq 0$ für jedes $i \subseteqq i_0$.

Beweis. Sonst existiert[47]) ein Segment $\bar{v}_1 \subset i_0$ mit $\Psi(v_1) < 0$. Bei $\Psi_\varepsilon \equiv \Psi + \varepsilon \cdot \Phi$ ist dann für einen genügend kleinen positiven Wert ε auch $\Psi_\varepsilon(v_1) < 0$; daneben ist in jedem Punkte $P \in i_0$ für dieses ε $\underline{D}_{\Phi;P}\Psi_\varepsilon > 0$.

Wir betrachten Riemann-Klassen $\mathfrak{A}_k[v_1]$ $(k=1, 2, \ldots)$ von v_1, mit den Umgebungen $i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P)$ von $P \in \bar{v}_1$ aus der Umgebungsbasis $\{i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P)\}$ von P [wobei $\{i_k(P)\}$ die Basis gemäß Ax. 12^a für den Punkt P]. Zu $\mathfrak{A}_1[v_1]$ gibt es, nach Axiom 7° (A, § 2), eine $\mathfrak{A}_1[v_1]$-Zerlegung von v_1. Aus der Additivität von Ψ_ε und $\Psi_\varepsilon(v_1) < 0$ folgt die Existenz eines Zerlegungsintervalls mit $\Psi_\varepsilon < 0$; es gibt dabei zwei Möglichkeiten: 1° das Intervall, u_1 genannt, korrespondiert mit einem Punkt $P_1 \in v_1$, wobei

$$P_1 \in u_1(P_1),\ \bar{u}_1(P_1) \subset i_0 \cdot i_1(P_1);$$

2° das Intervall, $\mathfrak{u}_1$ genannt, korrespondiert mit einem Punkt $P_1 \in \bar{v}_1 - v_1$, wobei

$$P_1 \in \bar{\mathfrak{u}}_1 - \mathfrak{u}_1,\ \bar{\mathfrak{u}}_1 \subset i_0 \cdot i_1(P_1);$$

mit Axiom 10° und der Stetigkeit von Ψ_ε in i_0 folgt die Existenz eines

---

46) Axiom 14^c hat wieder in R_2 ein beweisbares Analogon.

47) Dies folgt ev. aus $\Psi(i_0) < 0$ in indirekter Weise unter Anwendung von Axiom 10° (B, § 5) und der Stetigkeit von Ψ in i_0.

Intervalles, welches in diesem Fall u_1 genannt wird, und folgende Eigenschaften hat:

$$\bar{\mathfrak{u}}_1 \subset u_1,\ P_1 \in u_1,\ \bar{u}_1 \subset i_0 \cdot i_1(P_1),\ \Psi_\varepsilon(u_1) < 0.$$

In beiden Fällen haben P_1 und u_1 die Eigenschaften:

$$P_1 \in u_1,\ \bar{u}_1 \subset i_0 \cdot i_1(P_1),\ \Psi_\varepsilon(u_1) < 0.$$

Aus $\Psi_\varepsilon(u_1) < 0$ folgt wieder die Existenz eines Segmentes $\bar{v}_2 \subset u_1$ mit $\Psi_\varepsilon(v_2) < 0$. Aus den Riemann-Klassen $\mathfrak{A}_k[v_2]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ von v_2, mit den Umgebungen $i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P)$ von $P \in \bar{v}_2$ aus der Basis $\{i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P)\}$ von P, wird nun die Klasse $\mathfrak{A}_2[v_2]$ gewählt. Betrachtungen wie im vorigen Absatz führen dann zu einem Punkte P_2 und einem Intervall u_2 mit den Eigenschaften:

$$P_2 \in u_2,\ \bar{u}_2 \subset u_1,\ \bar{u}_2 \subset i_0 \cdot i_1(P_2) \cdot i_2(P_2),\ \Psi_\varepsilon(u_2) < 0.$$

So fortfahrend entsteht eine Punktfolge $\{P_k\}$ mit Umgebungen $u_k(P_k)$, $\Psi_\varepsilon(u_k) < 0$, und

$$\bar{u}_1 \subset i_0 \cdot i_1(P_1),\ \bar{u}_2 \subset u_1 \cdot i_0 \cdot i_1(P_2) \cdot i_2(P_2),\ \ldots,\ \bar{u}_k \subset u_{k-1} \cdot i_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} i_j(P_k),\ \ldots$$

Mit Axiom 14^c folgt die Konvergenz von $\{P_k\}$ gegen einen Limespunkt P $(\in i_0)$, wobei zu jeder natürlichen Zahl n eine weitere natürliche Zahl $\varkappa_n$ existiert mit

$$\bar{u}_k(P_k) \subset i_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} i_j(P) \text{ für jedes } k \geqq \varkappa_n;$$

dadurch ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{u}_k(P_k) = P$ und $P \in$ jedes $\bar{u}_k(P_k)$. Mit $\dfrac{\Psi_\varepsilon(u_k)}{\Phi(u_k)} < 0$ und Ax. 10° folgt

$$\underline{D}_{\Phi;P}\, \Psi_\varepsilon \leqq 0.$$

Wir erhalten einen Widerspruch.

Definition A$^{(1)}$. Eine in i_0 additive, stetige Intervall- und Segmentfunktion $\Psi_o^{(1)}$, mit $\Psi_o^{(1)}(i) = \Psi_o^{(1)}(\bar{i})$ für jedes Intervall $i \subseteqq i_0$, ist *eine* $(\Phi)^{(1)}$-*Majorante einer in* i_0 *definierten endlichwertigen Punktfunktion* f *(*Φ *mit der Ru-Eigenschaft)*, falls in jedem Punkt $P \in i_0$: $\underline{D}_{\Phi;P}\Psi_o^{(1)}$ $(> -\infty$ und$) \geqq f(P)$ ist.

Definition B$^{(1)}$. *Eine* $(\Phi)^{(1)}$-*Minorante* $\Psi_u^{(1)}$ ist additiv und stetig in i_0 mit $\overline{D}_{\Phi;P}\Psi_u^{(1)}$ $(< +\infty$ und$) \leqq f(P)$ in jedem Punkt $P \in i_0$.

Mit dem Lemma folgt für zwei Funktionen $\Psi_o^{(1)}$, $\Psi_u^{(1)}$ daß ihre Differenz $\Psi_o^{(1)} - \Psi_u^{(1)}$ eine nicht-negative stetige Intervall- und Segmentfunktion ist. Die Definition *einer zugehörigen* $(PS)^{(1)}$-*Integration der in* i_0 *endlichwertigen Funktion* f *i.b.a.* Φ *über die Teilintervalle und -segmente von* $\bar{i}_0$,

$$\int_{i(\bar{i})} (PS)^{(1)} f\, d\Phi,$$

wird klar sein; *das Integral ist ebenfalls additiv und stetig.*

Die zweite (PS)-Integration wird nun eingeführt.

Definition $A^{(2)}$. Eine in i_0 additive, stetige Intervall- und Segmentfunktion $\Psi_o^{(2)}$, mit $\Psi_o^{(2)}(i) = \Psi_o^{(2)}(\bar{i})$ für jedes Intervall $i \subseteqq i_0$, ist *eine* $(\Phi)^{(2)}$-*Majorante einer in* i_0 *definierten endlichwertigen Punktfunktion* f (Φ *mit der Ru-Eigenschaft*), wenn es eine mit $\Psi_o^{(2)}$ korrespondierende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ (siehe A, § 2, Def.) gibt, so daß bei $P \in i_0$, $P \in u \subseteqq i(P) \cdot i_0$, mit $i(P) \in \mathfrak{A}[i_0]$, immer
$$\Psi_o^{(2)}[u] \geqq f(P) \cdot \Phi[u]$$
ist.

Definition $B^{(2)}$ *einer* $(\Phi)^{(2)}$-*Minorante* $\Psi_u^{(2)}$ *der in* i_0 *definierten endlichwertigen Punktfunktion* f liegt nun auf der Hand, ebenso wie die Definition *des zugehörigen* $(PS)^{(2)}$-*Integrals i.b.a.* Φ, $\int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi$, *in* i_0. *Das Integral ist wieder additiv und stetig.*

Satz. Bei in i_0 endlichwertiger Funktion f führen die Definitionen der Integrale $\int_i (PS)^{(1)} f\, d\Phi$ und $\int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi$ genau ebenso weit.

Beweis. Der Satz folgt einerseits daraus daß jede Majorante gemäß Def. $A^{(2)}$ auch Majorante gemäß Def. $A^{(1)}$, jede Minorante gemäß Def. $B^{(2)}$ auch Minorante gemäß Def. $B^{(1)}$ ist, und andererseits, bei $\varepsilon > 0$, aus $\Psi_o^{(1)}$ Majorante gemäß Def. $A^{(1)}$ und $\Psi_u^{(1)}$ Minorante gemäß Def. $B^{(1)}$ folgt $\Psi_o^{(1)} + \varepsilon \cdot \Phi$ und $\Psi_u^{(1)} - \varepsilon \cdot \Phi$ bzw. Majorante gemäß Def. $A^{(2)}$ und Minorante gemäß Def. $B^{(2)}$.

§ 18^{bis}. Satz. Hat eine in i_0 „endliche" Funktion f ein $(DLiS)^*$-Integral i.b.a. Φ (Φ mit der Ru-Eigenschaft) über i_0, so ist sie auch $(PS)^{(1)}$-integrierbar i.b.a. Φ über i_0, wobei für jedes Intervall $i \subseteqq i_0$:
$$\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi = \int_i (PS)^{(1)} f\, d\Phi.$$

Beweis. Aus den Definitionen der $(DLiS)^*$- und $(DLiS)$-Integrale (§§ 17, 17^{bis}) geht hervor daß in den Punkten von i_0, eine Teilmenge E von m_Φ-Maß Null ausgenommen, $\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi$ eine (starke) Ableitung gleich f hat, und daß die extremen Derivierten dieses Integrals in allen Punkten von i_0 endlich sind.

Zu $\varepsilon > 0$, einer natürlichen Zahl ν und E gibt es eine offene Menge Ω_ν mit $i_0 \supset \Omega_\nu \supset E$, $m_\Phi(\Omega_\nu) < {}^{\varepsilon}/_{2^{2\nu}}$. Die Funktion f_ν, gleich 2^ν in den Punkten von Ω_ν, gleich Null in den Punkten von $i_0 - \Omega_\nu$ führt zu der Intervallfunktion $F_\nu(i) \equiv \int_i (LS) f_\nu dm_\Phi$, deren extreme Derivierten in allen Punkten von $i_0 \geqq 0$, und in den Punkten von $\Omega_\nu = 2^\nu$ sind. Die Summe $F(i) \equiv \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(i)$ ist eine in i_0 nicht-negative additive, stetige Intervallfunktion, mit
$$F(i_0) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(i_0) < \varepsilon,\ \underline{D}_{\Phi;\, P} F(i) \geqq 0 \text{ für jeden Punkt } P \in i_0,$$
$$\underline{D}_{\Phi;\, Q} F(i) = +\infty \text{ für jeden Punkt } Q \in E.$$
Also ist $\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi + F(i)$ in i_0 eine $(\Phi)^{(1)}$-Majorante von f, welche um weniger als ε von $\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi$ abweicht.

Da analog $\int_i(DLiS)^* f\, d\Phi - F(i)$ eine $(\Phi)^{(1)}$-Minorante von f ist mit einer Abweichung von $\int_i(DLiS)^* f\, d\Phi$ ebenfalls kleiner als ε, folgt die Behauptung des Satzes.

§ 18ter. Satz. Bei in i_0 „endlichwertiger" Funktion f folgt aus der Existenz eines von innen her randstetigen Integrals $\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i(PS)^{(2)} f\, d\Phi$ (Φ mit der Ru-Eigenschaft) für jedes $\bar{\imath} \subset i_0$ auch die des allgemeinen Riemann-Integrals von f i.b.a. Φ über i; ihre Werte sind dabei dieselben.[48])

Beweis. Aus der Definition von $\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i(PS)^{(2)} f\, d\Phi$ folgt, bei $\varepsilon > 0$, die Existenz einer $(\Phi)^{(2)}$-Majorante $\Psi_o^{(2)}$ (Def. $A^{(2)}$) und einer $(\Phi)^{(2)}$-Minorante $\Psi_u^{(2)}$ (Def. $B^{(2)}$) mit

$$(65) \qquad \int_i(PS)^{(2)} f\, d\Phi + \varepsilon > \Psi_o^{(2)}[i] \geqq \Psi_u^{(2)}[i] > \int_i(PS)^{(2)} f\, d\Phi - \varepsilon;$$

die zu $\Psi_o^{(2)}$ und $\Psi_u^{(2)}$ gehörenden Riemann-Klassen können wir derartig einschränken daß eine gemeinsame Klasse $\mathfrak{A}[i]$ entsteht.

Aus der Randstetigkeit von $\int_i(PS)^{(2)} f\, d\Phi$ in i_0 folgt, bei dem gewählten ε, die Existenz einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[r]$ $(r = \bar{\imath} - i)$, für die das Integral eine Ungleichheit wie in der Definition von § 17ter erfüllt. Durch ev. Einschränkung der durch $\mathfrak{A}[i]$ jedem Randpunkt P von i zugewiesenen Umgebung wird erreicht daß die neue Umgebung $i(P)$ der Bedingung $i(P) \subset$ Umgebung von P gemäß § 17ter genügt. Die so abgeänderte Riemann-Klasse deuten wir wieder durch $\mathfrak{A}[i]$ an.

Für eine willkürliche $\mathfrak{A}[i]$-Zerlegung von i (gemäß Ax. 7° in A, § 2) läßt sich die Summe

$$\sum_{(j)}{}' f(P_j) \cdot \Phi[u(P_j)], \text{ mit } u(P_j) \subset i(P_j) \in \mathfrak{A}[i],$$

bilden, wobei nur über solche j summiert wird, für die $P_j \in i$. Dann ist

$$(66) \qquad \sum_{(j)}{}' \Psi_o^{(2)}[u(P_j)] \geqq \sum_{(j)}{}' f(P_j) \cdot \Phi[u(P_j)] \geqq \sum_{(j)}{}' \Psi_u^{(2)}[u(P_j)].$$

Für die am Rande grenzenden Zerlegungsintervalle von i: $w_k \equiv u(P_k) \cdot i$, mit $P_k \in r$, ist wegen (65):

$$\sum_{(k)} \int_{w_k}(PS)^{(2)} f\, d\Phi + \sum_{(j)}{}' \int_{u(P_j)}(PS)^{(2)} f\, d\Phi + \varepsilon > \sum_{(k)} \Psi_o^{(2)}[w_k] + \sum_{(j)}{}' \Psi_o^{(2)}[u(P_j)] \geqq$$
$$\geqq \sum_{(k)} \Psi_u^{(2)}[w_k] + \sum_{(j)}{}' \Psi_u^{(2)}[u(P_j)] > \sum_{(k)} \int_{w_k}(PS)^{(2)} f\, d\Phi + \sum_{(j)}{}' \int_{u(P_j)}(PS)^{(2)} f\, d\Phi - \varepsilon,$$

woraus, mit $\Psi_u^{(2)}[u(P_j)] \leqq \int_{u(P_j)}(PS)^{(2)} f\, d\Phi \leqq \Psi_o^{(2)}[u(P_j)]$ und § 17ter, Def., folgt

$$(67) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\varepsilon > \sum_{(k)} \int_{w_k}(PS)^{(2)} f\, d\Phi + \varepsilon > \sum_{(k)} \Psi_o^{(2)}[w_k] \geqq \sum_{(k)} \Psi_u^{(2)}[w_k] > \\ & \qquad > \sum_{k} \int_{w_k}(PS)^{(2)} f\, d\Phi - \varepsilon > -2\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

---

[48]) Korrektur. Die Bedingung "von innen her randstetig" soll auch loc. cit. 35), Teil VIII, § 58bis für das Ausgangsintegral der beiden letzten Sätze des Par. und des Theorems 67 vorausgesetzt werden; daneben ändere man in Theorem und Beweis $i \subseteqq i_0$ in $\bar{\imath} \subset i_0$.

Aus (65), (66) und (67) folgt für die $\mathfrak{A}[i]$-Zerlegung

$$\int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi + \varepsilon > \Psi_o^{(2)}[i] \geqq \sum_{(j)}' f(P_j)\cdot \Phi[u(P_j)] - 2\varepsilon,$$

also

$$\int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi + 3\varepsilon > \sum_{(j)}' f(P_j)\cdot \Phi[u(P_j)];$$

ebenfalls folgt

$$\int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi - 3\varepsilon < \sum_{(j)}' f(P_j)\cdot \Phi[u(P_j)].$$

Somit existiert das allgemeine R-Integral von f i.b.a. Φ über i, mit

$$\int_i \text{ (allg. } R) f\, d\Phi = \int_i (PS)^{(2)} f\, d\Phi.$$

§ 19. Theorem 21. Hat in i_0 eine Punktfunktion f ein von innen her randstetiges (im allgemeinen nicht absolut-konvergentes) $(DLiS)^*$-Integral i.b.a. Φ (Φ mit der Ru-Eigenschaft), so hat sie in i_0 auch ein unbestimmtes allgemeines Riemann-Integral i.b.a. Φ von gleichem Werte; mit $\bar{\imath} \subset i_0$ folgt dann also:

$$\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi = \int_i \text{ (allg. } R) f\, d\Phi.$$

Beweis. Aus den Definitionen der $(DLiS)^*$- und $(DLiS)$-Integrale (§§ 17, 17bis) geht hervor daß bei Existenz von $\int_{i_0}(DLiS)^* f\, d\Phi$ die Funktion f höchstens in einer Teilmenge E von i_0 mit $m_\Phi(E)=0$ unendlich sein kann, während dann auch eine Funktion f_0, welche in den Punkten von $i_0 - E$ mit f zusammenfällt, und willkürliche endliche Werte in den Punkten von E hat, $(DLiS)^*$-integrierbar i.b.a. Φ über i_0 ist, mit

$$\int_i (DLiS)^* f\, d\Phi = \int_i (DLiS)^* f_0\, d\Phi \quad (\bar{\imath} \subset i_0). \tag{68}$$

Mit den drei vorangehenden Sätzen folgt weiter

$$\left\{\begin{aligned} &\int_i (DLiS)^* f_0\, d\Phi = (\S\ 18^{\text{bis}}) \int_i (PS)^{(1)} f_0\, d\Phi = \\ &\qquad = (\S\ 18) \int_i (PS)^{(2)} f_0\, d\Phi = (\S\ 18^{\text{ter}}) \int_i \text{ (allg. } R) f_0\, d\Phi. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Mit Def. $\delta^{(3)}$ in B, § 6 folgt

$$\int_i \text{ (allg. } R) f_0\, d\Phi = \int_i \text{ (allg. } R) f\, d\Phi. \tag{70}$$

(68), (69) und (70) liefern das Theorem 21.

Zusammenfassung. Siehe die Einleitung.